AULA 7

Grafos

META

- Introduzir noções elementares da teoria dos grafos.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Representar grafos por meio de matrizes e diagramas;
- Caracterizar uma árvore;
- Identificar grafos isomorfos.

PRÉ-REQUISITOS

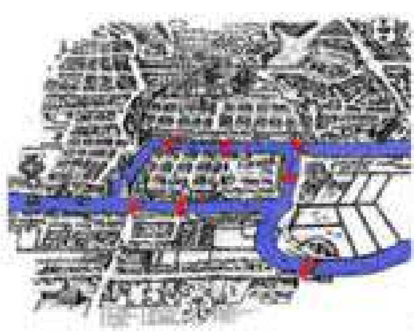
- Princípio da indução (aula 1);

7.1 Introdução

Caro aluno, a partir desta aula iniciaremos uma nova etapa do curso de matemática discreta. Passaremos a estudar alguns problemas famosos da teoria dos grafos. Para nos familiarizarmos com os termos usados nas aulas seguintes, definiremos alguns conceitos elementares. Afinal de contas, o que é um grafo? Veremos que muitos problemas podem ser modelados por grafos. Desde uma simples caminhada pela cidade até a tarefa de construir uma rede de comunicações com custo mínimo, passando pelas estruturas atômicas de compostos químicos. Daremos ainda o conceito de isomorfismo de grafos, que nos permitirão compará-los. Para concluir, apresentaremos problemas famosos da teoria dos grafos que serão melhor tratados nas aulas seguintes.

7.2 Noções Elementares

Um grafo G é uma tripla $(V, E, \mathcal{I})$, onde V e E são conjuntos finitos e $\mathcal{I} \subset V \times E$ satisfaz $1 \leq N(\{v \in V; (v,e) \in \mathcal{I}\}) \leq 2$, para qualquer $e \in E$. Chamamos $V(G), E(G)$ e $\mathcal{I}$ de vértices, arestas e relação de incidência do grafo G, respectivamente. Notamos, pelo número de elementos do conjunto $I_e = \{v \in V; (v,e) \in \mathcal{I}\}$, que



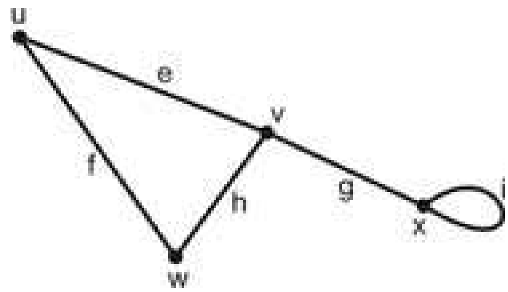


Figura 7.1: Grafo com vértices $V = \{u, v, w, x\}$, arestas $E = \{e, f, g, h, i\}$ e relação de incidência $\mathcal{I} = \{(u, e), (v, e), (u, f), (w, f), (v, g), (x, g), (v, h), (w, h), (i, x)\}$. Observe que i é um laço do grafo.

existem dois tipos de arestas. Se $N(I_e) = 1$, isto é, se existe apenas um vértice incidente à aresta e, dizemos que e é um laço. Quando o grafo não possui laçoes nem arestas múltiplas, isto é, dois vértices ligados por mais de uma aresta, o grafo é dito simples. Vértices que não se ligam a nenhum outro são ditos isolados. Convencionamos desenhar um grafo representando cada vértice por um círculo e as arestas por linhas ligando estes círculos.

Duas arestas incidentes num mesmo vértice são chamados adjacentes. O grau de um vértice é o número de arestas incidentes no vértice, sendo que cada laço conta como dois vértices.

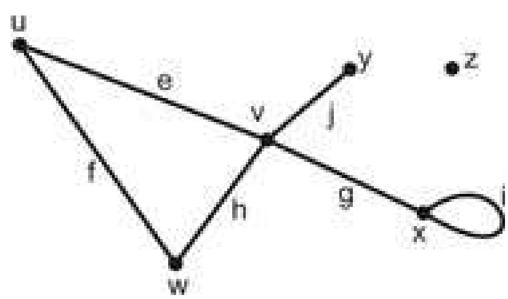


Figura 7.2: As arestas e e f são adjacentes, pois são incidentes ao vértice u. O grau do vértice v é $d_v = 4$, já o grau de x é $d_x = 3$ e o vértice z é isolado, logo $d_z = 0$.

Teorema 7.1. *A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas.*

Demonstração: *Quando os graus são somados contamos cada aresta duas vezes.* $\square$

Corolário 7.1. *O número de nós de grau ímpar de um grafo é par.*

Demonstração: *Considere um grafo $G = (V, E, \mathcal{I})$. Denotando o grau do vértice v por d_v, segue do teorema anterior que:*

$$2N(E) = \sum_{v \in V} d_v = \sum_{v \in V; d_v par} d_v + \sum_{v \in V; d_v impar} d_v$$

Separando o somatório em duas parcelas, a primeira contendo os graus pares e a segunda os graus ímpares, vemos que a primeira é par e como a soma das duas parcelas também é par, segue que a segunda parcela deve ser par. $\square$

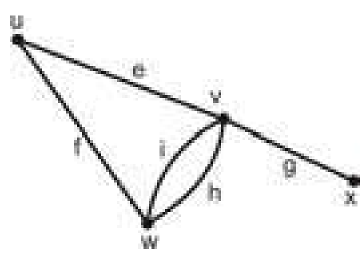
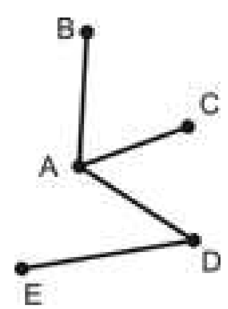


Figura 7.3: A sequência (u, e, v, i, w, h, v, x) é um ux-passeio, mas não é ux-caminho, pois o vértice v se repete. Já a sequência (x, g, v, e, u, f, w) é um xw-caminho. A sequência $(x, g, v, h, w, f, u, e, v, g, x)$ é um circuito, mas não é um ciclo. Contudo, (v, e, u, f, w, i, v) é ciclo. Observe que este grafo é conexo.

Um passeio do vértice u para o vértice v de um grafo (uv-passeio) é uma sequência alternada de vértices e arestas começando no vértice u e terminando no v, tal que cada aresta é incidente aos vértices que o cercam na sequência. Um caminho é um passeio que não contém vértices repetidos. Um circuito é um passeio fechado, isto é, um passeio de um vértice para ele mesmo. Um ciclo é um caminho fechado, isto é, um passeio que contém exatamente dois vértices iguais: o inicial e o final. Dois vértices estão conectados se existe caminho entre eles no grafo. Um grafo é conexo se qualquer par de vértices no grafo estão conectados.

Exemplo 7.1 (Rede de comunicações)**.** Deseja-se configurar uma rede de comunicações entre as cidades A, B, C, D, E de tal maneira que possa haver comunicação entre cada par de cidades. As ligações devem ser efetuadas por cabos telefônicos. Admitimos que mensagens possam ser retransmitidas, isto é, qualquer cidade pode mandar mensagem para outra por uma terceira. Modelar por meio de grafos.



Solução: O conjunto de cidades corresponde ao conjunto de vértices e cada aresta corresponde a um cabo telefônico. A figura mostra uma possível configuração de cabos entre as cidades que satisfaz à exigência do enunciado, ou seja, cada cidade pode se comunicar com qualquer outra. O grafo da figura é um exemplo de árvore, um grafo com exatamente um caminho entre cada par de vértices. Ou seja, este tipo de grafo fornece o esquema de conexão o mais "enxuto"possível, pois, se retirarmos uma aresta que seja, eliminamos pelo menos um caminho e desconectamos o grafo.

Este problema vem, em geral, formulado como um problema de otimização: a "construção"de cada aresta implica num custo e queremos determinar quais arestas construir de modo a assegurar a comunicação a um custo o menor possível. Este é mais um problema na área de otimização combinatorial. ◀

O grafo $H = (V_H, E_H, \mathcal{I}_H)$ é um subgrafo de $G = (V, E, \mathcal{I})$ se $V_H \subset V$, $E_H \subset E$ e a relação de recorrência $\mathcal{I}_H$ é a restrição de $\mathcal{I}$ a $V_H \times E_H$. As componentes conexas de um grafo são os subgrafos conexos maximais deste grafo, ou seja, são os subgrafos deste grafo que não estão estritamente contidos em outros subgrafos conexos.

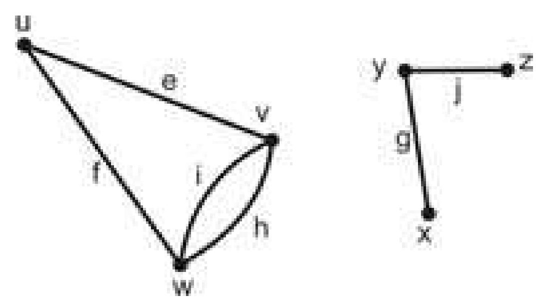


Figura 7.4: Grafo desconexo com duas componentes conexas facilmente identificáveis.

O desenho do grafo é muito útil em muitas situações. Porém, para grafos maiores e mais complexos precisamos de outro tipo de descrição. Podemos representar grafos por meio de matrizes, estabelecendo assim um elo útil com a álgebra. Temos a matriz de incidência $V \times E$, cujas linhas estão associadas aos vértices e as colunas às arestas. Um elemento na linha i e coluna j é 1 se o vértice i é incidente na aresta j e 0 caso contrário. A matriz de adjacência tem linhas e colunas associadas aos vértices. O elemento na linha i e coluna j é o número de arestas que têm i e j como extremidades.

A matriz de incidência e de adjacência do grafo anterior são apresentadas abaixo.

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.3 Árvores

Definição 7.1. Uma árvore é um grafo simples conexo sem ciclos.

Teorema 7.2. *Se T é uma árvore com $v \geq 2$ vértices então T contém ao menos dois vértices de grau 1.*

Demonstração: *Desde que T tem v vértices, todos caminhos em T devem ter comprimento menor do que v. Então deve existir um caminho mais longo em T, digamos $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$. Afirmamos que v_1 e v_r têm grau 1. Suponha que v_1 tem grau maior do que 1; então existe uma outra aresta incidente a v_1, digamos v_1v_0, onde v_0 é diferente de todos os demais $v_2, \ldots, v_r$, pois caso contrário* *existiria um ciclo. Então* $(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ *seria um caminho mais longo, contradição. Portanto, grau de* v_1 *é 1 e similarmente, grau de* v_r *é 1.* □

Teorema 7.3. *Seja* T *um grafo simples com* v *vértices. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T *é uma árvore;*

(ii) T *tem* $v - 1$ *arestas e nenhum ciclo;*

(iii) T *tem* $v - 1$ *arestas e é conexo.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ *Devemos mostrar que todas árvores com* v *vértices possuem* $v - 1$ *arestas. Isso é verdade para* $v = 1$*. Suponha verdade para todas árvores com* $v \leq k$ *vértices e tome uma árvore* T *com* $k + 1$ *vértices. Então pelo teorema anterior,* T *possui um vértice* w *de grau 1. Remova* w *e sua aresta incidente de* T *para obter uma árvore* T' *com* k *vértices. Pela hipótese de indução,* T' *possui* $k - 1$ *arestas; logo* T *possui* $(k - 1) + 1 = k$ *arestas.*

$(ii) \Rightarrow (iii)$ *Suponha que* T *possui* $v - 1$ *aresta, nenhum ciclo e é constituído por* $t \geq 1$ *componentes conexas* $T_1, \ldots, T_t$*, cada uma das quais não possui ciclo e portanto, deve ser uma árvore. Denote por* v_i *o número de vértices de* T_i*. Então* $\sum_i p_i = p$*, e o número de arestas em* T *é* $\sum_i (p_i - 1) = p - t$*. Então* $p - t = p - 1$*, isto é,* $t = 1$*, logo* T *é conexo.*

$(iii) \Rightarrow (i)$ *Suponha que* T *é conexo com* $v - 1$ *arestas, mas não é uma árvore. Então* T *deve ter um ciclo. Removendo uma aresta de um ciclo, nós não destruímos a conexidade, então podemos remover arestas dos ciclos até não restarem mais ciclos e preservar a* *conexidade. O grafo resultante deve ser uma árvore, com v vértices e $a < v - 1$ arestas, contradizendo (ii).* □

Esse teorema pode ser usado para estabelecer uma natureza de árvore de certas moléculas químicas.

Exemplo 7.2 (Alcanos)**.** Mostre que os alcanos (parafinas) C_nH_{2n+2} são moléculas do tipo árvore.

Solução: Cada molécula é representada por um grafo com $v = n + (2n + 2) = 3n + 2$ vértices. Dessas, n têm grau 4 (valência do carbono) e $2n+2$ têm grau 1 (valência do hidrogênio). Então, pelo teorema (7.1), $2a = 4n + 2n + 2 = 6n + 2$, portanto, $a = 3n + 1 = v - 1$. Desde que moléculas são conexas, segue do teorema anterior que os grafos devem ser árvores, pelo teorema anterior. ◄

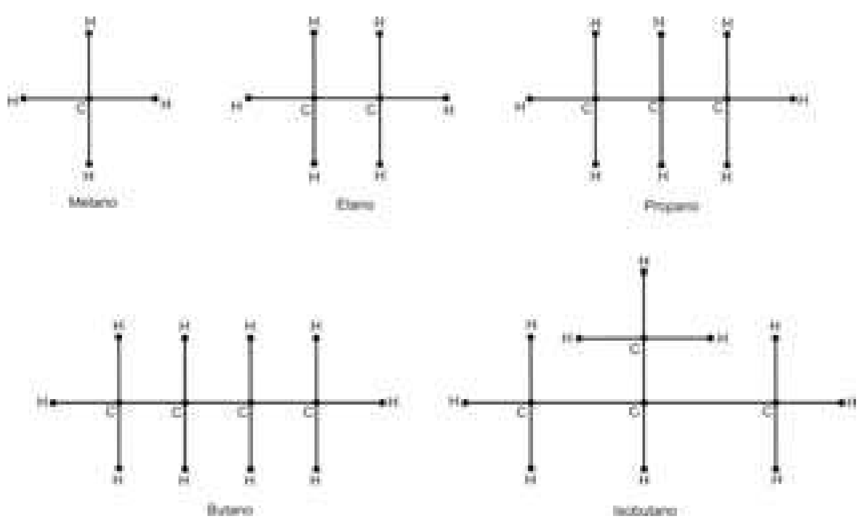


Figura 7.5: Observe que existem duas árvores "diferentes"correspondentes ao C_4H_{10}: butano e isobutano.

7.4 Isomorfismo

Dois grafos G e H são isomorfos se existe uma relação 1-1 entre os vértices $V(G)$ e $V(H)$ que preserva adjacência, isto é, se i e j em $V(G)$ são adjacentes em G, então os vértices correspondentes em $V(H)$ pela relação também são adjacentes em H e vice-versa.

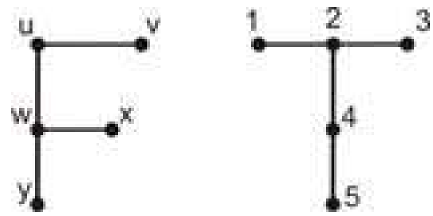


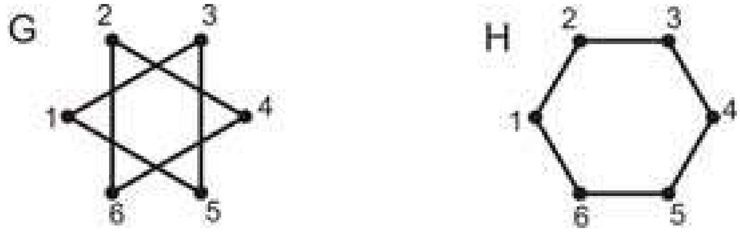
Figura 7.6: Grafos isomorfos. Considere a relação $f(1) = y, f(2) = w, f(3) = x, f(4) = u, f(5) = v$.

Não é tão simples perceber a relação entre os vértices que comprove o isomorfismo entre dois grafos. Se tivermos sorte de detectar por inspeção uma relação 1-1 que comprove o isomorfismo, ótimo. Caso contrário, temos que tentar verificar alguma diferença estrutural entre os grafos que evidencie não serem eles isomorfos. Os itens mais óbvios para verificar são número de vértices, número de arestas e graus de vértices. Mas outros itens úteis são conectividade ou planaridade (que será estudada na aula 9).

Exemplo 7.3 (Isomorfismo e conexidade)**.** Mostrar que os grafos G e H não são isomorfos.

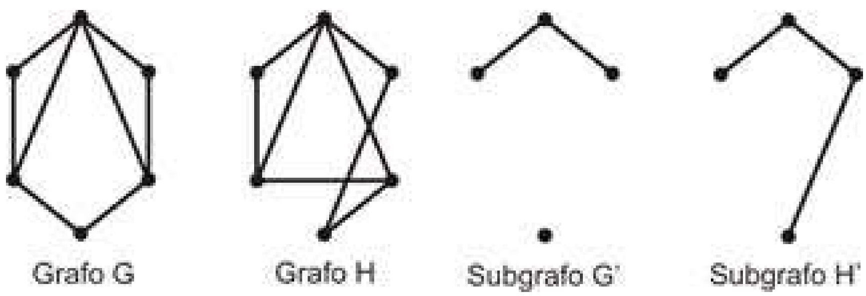
Solução: Note que G e H possuem o mesmo número de vértices, mesmo número de arestas, e o grau de todos os vértices é 2. No entanto, G é desconexo e H é conexo. Portanto, os grafos não são isomorfos. ◄

Considere agora dois grafos isomorfos $G, \tilde{G}$. Seja I um subcon-



junto de $V(G)$ e $\tilde{I}$ o subconjunto correspondente de $V(\tilde{G})$, com respeito à relação 1-1 que evidencia o isomorfismo entre G e $\tilde{G}$. Então, os subgrafos de G e $\tilde{G}$ obtidos pela remoção dos vértices em I e $\tilde{I}$ e as arestas a eles incidentes são também isomorfos.

Exemplo 7.4 (Isomorfismo e subgrafo)**.** Mostrar que os grafos G e H não são isomorfos.



Solução: Os dois grafos em questão contêm o mesmo número de vértices (6), de arestas (8) e o mesmo conjunto de graus de vértices $(2, 2, 2, 3, 3, 4)$. No entanto, se removermos os vértices de grau 3 de G e H, obtemos os subgrafos G' e H'. Portanto, G e H não são isomorfos, pois se fossem os subgrafos G' e H' seriam isomorfos, que não é o caso, uma vez que G' é desconexo e H' é conexo. ◀

O grafo completo K_n é o grafo simples com n vértices, em que cada par de vértices são adjacentes. Desde que cada um dos n vértices deve ter grau $n - 1$, o número a de arestas deve satisfazer

$2a = n(n-1)$, logo $a = \frac{1}{2}n(n-1)$.

7.5 Grafos Famosos

Nessa seção apresentamos alguns problemas famosos que serão nosso ponto de partida para as próximas aulas deste curso: roteamentos, planaridade e coloração.

Exemplo 7.5 (As pontes de Königsberg)**.** O primeiro e mais famoso problema na teoria dos grafos, resolvido por Euler em 1736, é o problema das 7 pontes. Na cidade de Königsberg sete pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na figura a seguir. Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

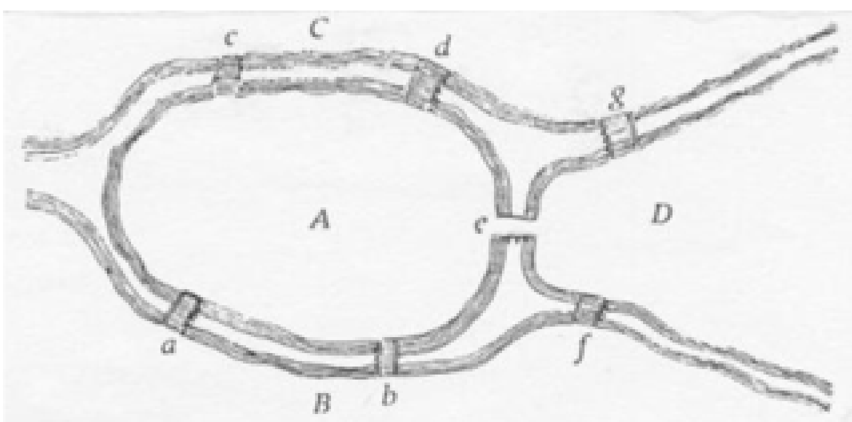


Figura 7.7: Ilhas no rio Pregel em Königsberg

Euler transformou o problema em um problema de grafos. A cada margem e ilha associou um vértice e a cada ponte uma aresta, obtendo o grafo da figura abaixo. Em termos de grafo, o problema consiste em achar um circuito que percorra cada aresta exatamente uma vez. Grafos para os quais isto é possível são chamados eulerianos. Na próxima aula veremos como Euler resolveu este problema. Você seria capaz de tentar?

Exemplo 7.6 (Ciclo Hamiltoniano)**.** Um problema semelhante ao problema das sete pontes de Königsberg consiste em verificar se, dado um grafo, é possível construir um ciclo que inclua todos os vértices. Tal ciclo é chamado de hamiltoniano. Um grafo que contenha tal ciclo é chamado de grafo hamiltoniano. O grafo abaixo é hamiltoniano.

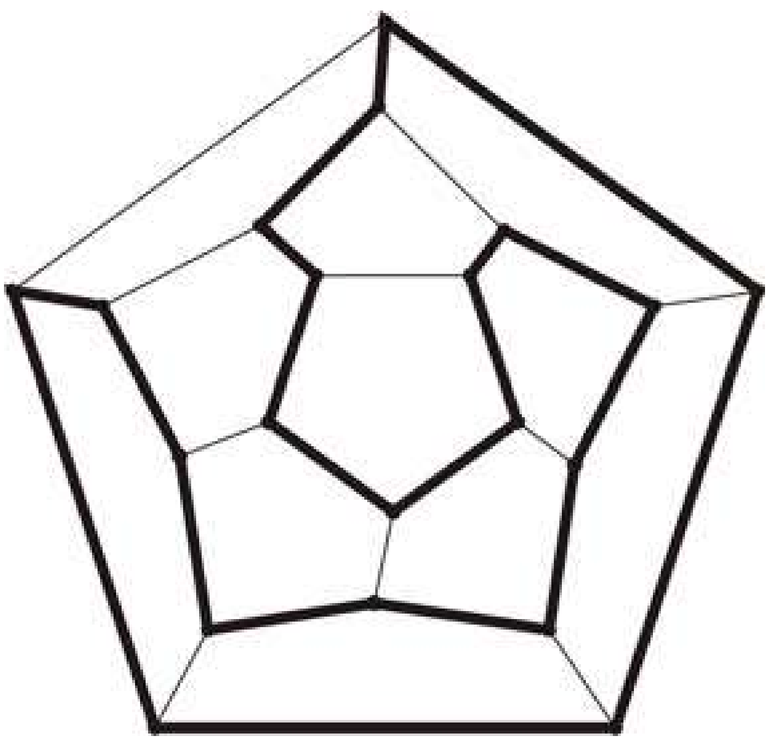


Figura 7.8: Grafo dodecaedro. Em destaque, ciclo hamiltoniano.

Embora semelhante ao problema de achar um ciclo euleriano, o problema de achar um ciclo hamiltoniano é muito mais complexo. Não são conhecidas condições necessárias e suficientes para que um grafo genérico contenha um ciclo hamiltoniano, nem tampouco métodos para construir tal ciclo, caso exista.

Exemplo 7.7 (Fornecimento de serviços)**.** Três companhias públicas devem fornecer três tipos de serviços, água, luz e gás, a três prédios públicos. Decidiu-se usar tubulações subterrâneas, todas à mesma profundidade, por motivos de segurança. Como realizar esta tarefa? Este é um famoso exemplo em teoria dos grafos, us-

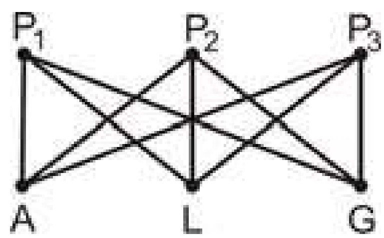
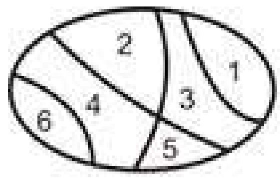


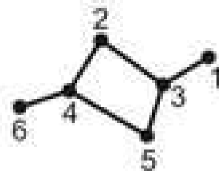
Figura 7.9: Grafo associado ao problema de fornecimento de serviços.

ado para introduzir e motivar o conceito de planaridade. Associando um vértice a cada prédio (P_1, P_2, P_3) e cada fonte de serviço (A, L, G), obtemos o grafo acima. Você consegue fazer essas 9 ligações sem que eles se cruzem?

Exemplo 7.8 (O problema das quatro cores)**.** O teorema das quatro cores diz que é possível colorir as regiões de qualquer mapa desenhado no plano usando no máximo quatro cores, de maneira que nenhum par de regiões que tenham uma fronteira em comum (não apenas um ponto) seja da mesma cor.

Para transformar este problema em um problema de grafos,





associamos a cada região um vértice e dizemos que dois vértices são adjacentes se as regiões correspondentes têm fronteira comum. Note que, por contrução, o grafo associado a um mapa qualquer é um grafo planar. A afirmação que temos, em termos de grafos, é que: "usando no máximo quatro cores, um grafo planar pode ter seus vértices coloridos de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes".

7.6 Conclusão

Nesta aula, nos familiarizamos com muitos novos conceitos da teoria dos grafos. Vimos o que é um grafo e como ele pode ser usado para modelar diversos problemas. Aprendemos a representar grafos de forma matricial, tanto por matriz de adjacência como por matriz de incidência. Conhecemos ainda algumas técnicas para verificar se dois grafos são isomorfos. Por fim fomos apresentados a alguns problemas famosos da teoria dos grafos e desafiados por eles.

RESUMO

Um grafo G é uma tripla $(V, E, \mathcal{I})$, onde V e E são conjuntos finitos e $\mathcal{I} \subset V \times E$ satisfaz $1 \leq N(\{v \in V; (v, e) \in \mathcal{I}\}) \leq 2$, para qualquer $e \in E$.

A matriz de incidência $V \times E$, possui linhas associadas aos vértices e colunas às arestas. O elemento na linha i e coluna j é 1 se o vértice i é incidente na aresta j e 0 caso contrário.

A matriz de adjacência tem linhas e colunas associadas aos vértices. O elemento na linha i e coluna j é o número de arestas que têm i e j como extremidades.

O grau de um vértice é o número de arestas incidentes no vértice, sendo que cada laço conta como dois vértices. A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas. O número de nós de grau ímpar de um grafo é par.

Um uv-passeio é uma sequência alternada de vértices e arestas começando no vértice u e terminando no v, tal que cada aresta é incidente aos vértices que o cercam na sequência. Um caminho é um passeio que não contém vértices repetidos. Um circuito é um passeio fechado. Um ciclo é um caminho fechado. Um grafo conexo é aquele tal que existe caminho entre qualquer par de vértices no grafo.

Uma árvore é um grafo simples conexo sem ciclos.

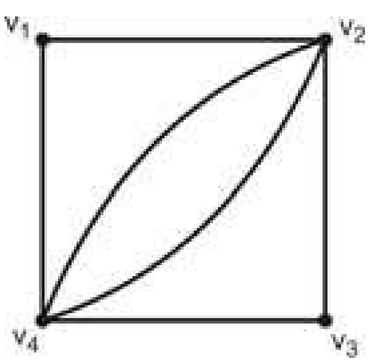
Dois grafos G e H são isomorfos se existe uma relação 1-1 entre os vértices $V(G)$ e $V(H)$ que preserva adjacência.

PRÓXIMA AULA

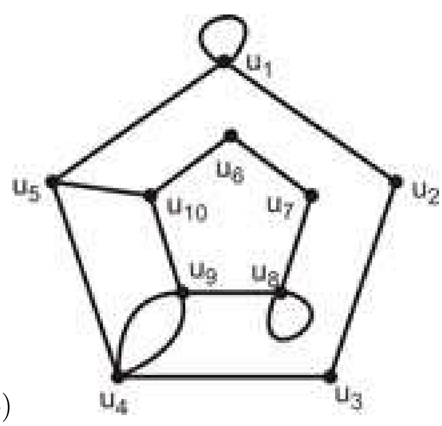
Na próxima aula, estudaremos a solução dada por Euler para o problema das pontes de Königsberg. Enunciaremos três problemas clássicos de roteamento: o carteiro chinês, o caixeiro viajante e caminho mais curto. Aprenderemos ainda o algoritmo de Dijkstra para obter um caminho mais curto entre vértices de um grafo.

ATIVIDADES

ATIVIDADE 7.1. Para cada grafo abaixo, determine as matrizes de adjacência e de incidência.



(a)



(b)

ATIVIDADE 7.2. Desenhe o grafo G que corresponde a cada uma das matrizes de adjacência seguintes:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

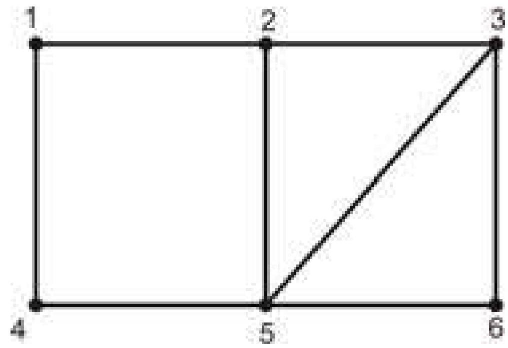
ATIVIDADE 7.3. Considere o grafo do item (b) da atividade 1. Determine um $u_{10}u_8$-passeio que não seja um $u_{10}u_8$-caminho, mas que possuam o mesmo número de arestas. Determine um u_5u_{10}-passeio que passa uma única vez por todas as arestas do grafo.

ATIVIDADE 7.4. Considere ainda os grafos da atividade 1. Eles são Eulerianos? E Hamiltonianos? Justifique suas respostas.

ATIVIDADE 7.5. Desenhe todas as árvores com exatamente seis vértices.

ATIVIDADE 7.6. Mostre que todos alcoóis $C_nH2n + 1OH$ têm moléculas do tipo árvore. (A valência de C,O e H são 4,2 e 1, respectivamente.)

ATIVIDADE 7.7. A operação deletar vértice de um grafo G determina um subgrafo G' com todos os vértices de G exceto aquele deletado e todas as arestas de G exceto as que contém o vértice deletado. Ache os subgrafos $G_k, k = 1, \ldots, 6$ obtidos do grafo G abaixo pela deleção do vértice k.



ATIVIDADE 7.8. Mostre que nenhum par de subgrafos $G_k, k = 1, \ldots, 6$ obtidos na atividade anterior são isomorfos.

REFERÊNCIAS

LIPSCHUTZ,S. LIPSON, M. Matemática Discreta. Coleção Schaum. Bookman: São Paulo, 2004.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.